**Tema 1.2. Elementos de Análisis Combinatorio.**

**Motivación del tema.** La base para hacer conteo en probabilidad es el principio fundamental del conteo que a su vez está basado en los diagramas de árbol. El siguiente ejemplo consiste en colocar cierto número de bolas en cierto número de cajas o celdas, el problema lo vamos a resolver con diagramas de árbol. Si se colocan aleatoriamente 3 bolas distinguibles B1,B2 y B3 en 3 celdas distinguibles C1,C2 y C3 entonces queremos encontrar la probabilidad de que exactamente queden dos celdas vacías.

**Solución.** Para resolver el problema empezamos por entenderlo. Tenemos 3 bolas y 3 celdas

C3

C2

C1

Buscaremos las formas en que podemos colocar las bolas en las celdas. Para hacer más ágil la presentación las 3 celdas las representamos por un paréntesis con 3 espacios . El primer espacio es para la celda 1, el segundo espacio es para la celda 2 y el tercer espacio es para la celda 3. Ahora tomamos la bola 1 y podemos meterla en la celda 1 o en la celda 2 o en la celda 3. Esto lo podemos representar por un diagrama de árbol con 3 ramas:

Pasamos a la bola 2 y de nuevo podemos meterla en la celda 1 o en la 2 o en la 3. Esto lo representamos por el siguiente diagrama de árbol que es extensión del anterior:

La notación empleada se entiende como sigue: la terna (B1B2, , ) se interpreta diciendo que en la celda 1 están las bolas 1 y 2, mientras que en las celdas 2 y 3 no hay bolas. De la misma forma la terna (B1,B2, ) la interpretamos diciendo que en la celda 1 está la bola 1, en la celda 2 está la bola 2, mientras que en la celda 3 no hay ninguna bola.

Para terminar el problema tomamos la bola 3 y en cada rama del diagrama de árbol anterior la vamos metiendo en cada una de las tres celdas

Observando el árbol completo el total de casos son 27 que se obtiene como , pues siempre tenemos tres ramas en cada vértice. Ahora para calcular la probabilidad de que haya 2 celdas vacías contamos de las 27 ternas las que tienen 2 celdas vacías y que son 3, entonces la probabilidad es

**Ejercicios.**

1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar 3 bolas distinguibles B1,B2 y B3 en 2 celdas distinguibles C1 y C2?

**Respuesta: 8.**

1. Supongamos que tenemos 3 bolas indistinguibles que las podemos denotar por tres asteriscos \*\*\* y tenemos tres celdas distinguibles C1, C2 y C3. (a) Construya un diagrama de árbol para encontrar de cuántas formas se pueden colocar las bolas en las celdas. (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos celdas vacías?

**Ayuda:** Observe que si se añade un bola en la celda 1 a ( ,\*,\* ) se obtiene (\*,\*, \*). Mientras que si añadimos una bola a la celda 2 a (\*, , \*) obtenemos la misma terna (\*,\*,\*) y no debemos contarla 2 veces.

**Respuesta: (a) 10 casos, (b) 3/10.**

**Principio Fundamental del Conteo**. Si hay formas de hacer una primera cosa y luego de ello hay formas de hacer una segunda cosa y luego de ello hay formas de hacer una tercera cosa entonces las 3 acciones se pueden llevar a cabo, una tras otra, de

formas. Podemos comprender esta fórmula con un diagrama de árbol ¡¡¡aunque no podamos dibujar el árbol!!!

**Tema 1.2.0. Principio Fundamental del Conteo**

**Observación 1.** Se analizarán algunas técnicas para determinar el **número de resultados posibles** de un experimento, sin enumerarlos directamente.

**Ejemplo 1.** Si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas, ¿de cuántas formas puede escoger una camisa y una corbata?

**Solución.** Resolvemos el problema con la siguiente tabla

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Camisa\Corbata | Corbata 1 | Corbata 2 | Corbata 3 | Corbata 4 |
| Camisa 1 | Camisa1,  Corbata 1 | Camisa 1,  Corbata 2 | Camisa 1,  Corbata 3 | Camisa 1,  Corbata 4 |
| Camisa 2 | Camisa 2,  Corbata 1 | Camisa 2,  Corbata 2 | Camisa 2,  Corbata 3 | Camisa 2,  Corbata 4 |

A partir de la tabla concluimos que el número de formas de seleccionar una camisa y una corbata es de . También podemos llegar al mismo resultado con el siguiente diagrama de árbol

En este caso el número de caminos nos da la respuesta y son .

Otra forma de resolver el problema es con el producto cartesiano. El producto cartesiano de los conjuntos

y

Nos da las posibles combinaciones de ponernos una corbata, si tenemos 4, y una camisa si tenemos 2

Corbata4

Corbata3

Corbata2

Corbata1

Camisa1 Camisa2

**Definición 1.** **Diagramas de Árbol.** Un árbol de decisión es un mapa de los posibles resultados de una serie de decisiones relacionadas. Permite que un individuo o una organización comparen posibles acciones entre sí según sus costos, probabilidades y beneficios. Se pueden usar para dirigir un intercambio de ideas informal o trazar un algoritmo que anticipe matemáticamente la mejor opción. Un diagrama de árbol empieza con un nodo, después colocamos varios nodos junto con sus ramas correspondientes a los resultados de un experimento aleatorio , después ponemos los nodos y ramas correspondientes a los resultados de un segundo experimento aleatorio y el proceso continúa. También se acostumbra poner en las ramas la probabilidad con que se obtiene el resultado al que llega la rama.

**Ejemplo 2.** Mario y Eduardo van a jugar un torneo de tenis. La primera persona que gane 2 juegos seguidos o quien gane un total de 3 juegos gana el torneo. Encuentre el número de formas como puede desarrollarse el torneo.

**Solución.** El siguiente diagrama muestra los resultados posibles del torneo. Específicamente hay 10 puntos finales que corresponden a las siguientes 10 formas como el torneo puede ocurrir.

M

E

M

E

M

E

M

E

M

E

M

E

M

E

M

E

M

E

El recorrido desde el principio del árbol a los puntos finales indica quién ganó cada juego en el torneo individual.

Lo que hicimos en este ejemplo lo generalizamos con . . .

**Principio Fundamental del Conteo.** **Si un evento puede ocurrir de formas y un segundo evento puede ocurrir de formas entonces el número de formas en que ocurre primero y después**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| E\F |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

es . También podemos visualizar este principio a través de un diagrama de árbol

donde en la primera columna aparecen los resultados del evento y en la segunda columna aparecen los resultados del evento . Como el número de caminos que empiezan con una son y hay e’s entonces el total de caminos es

**Teorema 1.**  **Principio fundamental del conteo visto como producto cartesiano.** Supongamos que y son conjuntos finitos, con y entonces

**Principio Fundamental del Conteo Generalizado.** Si los eventos se puede realizar de formas respectivamente entonces el número de formas en que pueden suceder los eventos, en el orden , es .

**Ejemplo 3.** Supongamos que seleccionamos 3 cartas de una baraja que tiene 52 cartas y que la carta seleccionada no se regresa al mazo de cartas, ¿de cuántas formas podemos seleccionar las 3 cartas? ¿Cuántas formas hay si la carta se regresa al mazo?

**Solución.** Si la carta no se regresa al mazo el número de formas de seleccionar 3 cartas es

Si la carta se regresa al mazo hay

**Ejemplo 4.** Supongamos que un restaurante tiene 3 aperitivos diferentes, 4 entradas diferentes y 2 postres, ¿de cuántas formas se puede ordenar un aperitivo, una entrada y un postre?

**Solución.** Por el principio fundamental del conteo hay formas diferentes de ordenar un aperitivo, una entrada y un postre.

**Ejemplo 5.** Un investigador quiere determinar el efecto de 3 variables, presión, temperatura y el tipo de catalizador, en la producción de un proceso de refinación. Si el investigador tiene la intención de utilizar 3 temperaturas, 3 presiones y 2 tipos de catalizador, ¿cuántos experimentos habría que hacer si quisiera incluir todas las posibles combinaciones de presión, temperatura y tipo de catalizador?

**Solución.** Por el principio fundamental del conteo el número de experimentos que debe hacer es .

**Ejemplo 6.** Se sacan una tras otra 2 cartas de un naipe común y bien barajado de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que (a) la primera carta no sea un 10 de tréboles o un as, (b) la primera carta sea un as pero la segunda no, (c) al menos una carta sea diamante, (d) las cartas no sean del mismo palo.

**Solución.** (a) Utilizando el principio fundamental del conteo, el número de formas de seleccionar 2 cartas en que la primera no sea un 10 de tréboles ni un as es y el número de formas de seleccionar 2 cartas una tras otra(importa el orden con que se sacan) es entonces la probabilidad es

(b) De nuevo utilizando el principio fundamental del conteo, el número de formas de seleccionar 2 cartas en que la primera sea un as pero la segunda no es entonces la probabilidad en este caso es

(c) El número de formas de que al menos una sea diamante es que la primera sea diamante y la segunda no o la segunda sea diamante y la primera no o las 2 sean diamante y esto puede ocurrir de entonces la probabilidad es

(d) El número de formas de que las 2 cartas no sean del mismo palo , pues a las 52 cartas le quitamos las 13 del palo al que pertenece la primera carta, entonces la probabilidad es

**Ejercicios.**

1. Con un diagrama de árbol obtenga cuántos números diferentes de 3 dígitos se pueden formar con 3 cuatro, 4 dos y 2 tres.

Respuesta: 26

1. Se va a conformar un comité de 3 miembros, compuesto por un representante de los trabajadores, uno de la administración y uno del público. Si hay 3 posibles representantes de los trabajadores, 2 de la administración y 4 del público, determine cuántos comités diferentes pueden formarse con un diagrama de árbol.

Respuesta: 24

1. Se sacan al azar (sin reemplazo) 3 cartas de una baraja de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de sacar (a) un diamante, un trébol y un corazón, (b) 2 corazones y luego un trébol o una pica.

Respuesta: (a)169/10200, (b) 13/425